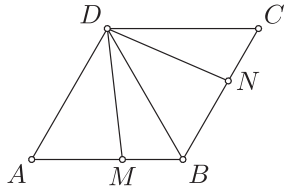
6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\measuredangle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

Решење:

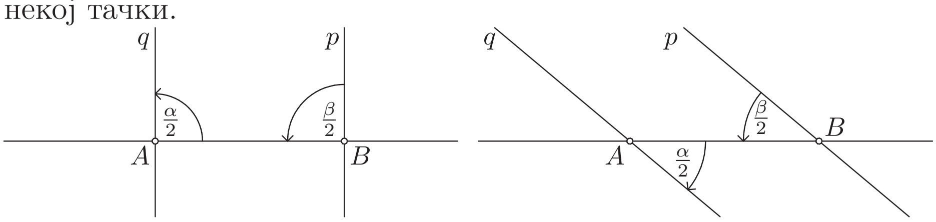


Важи $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(A) = B$ и $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(B) = C$. Дакле, ротацијом око D за 60° се дуж AB слика у дуж BC. Пошто је $BM + BN = AB$ и $BM = AB - AM$, па је $AB - AM + BN = AB$, следи да је $AM = BN$. Нека је $M' = \mathcal{R}_{D,60^\circ}(M)$. Следи да важи $AM = BM'$, па следи $BN = BM'$. Тачке N, M' су између тачака B, C и на истом растојању од B, па следи да је $M' = N$, тј. да је $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(M) = N$. Одавде следи да је троугао $\triangle DMN$ једнакостраничан, јер је $DM = DN$ и $\measuredangle MDN = 60^\circ$.

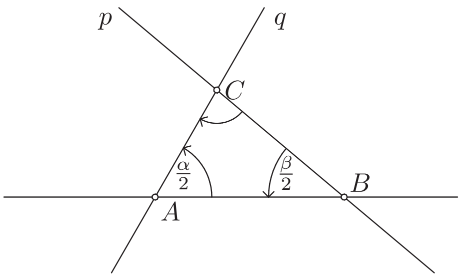
7. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$.

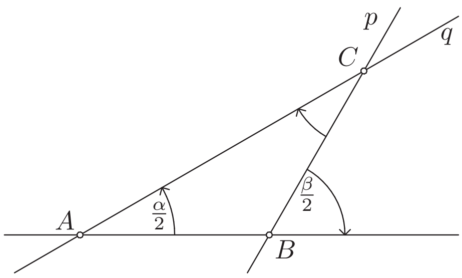
Решење: Нека су $\alpha, \beta \in [-180^\circ, 180^\circ]$. Ако је $A = B$, онда важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{A,\alpha+\beta}$, ако је $\alpha + \beta \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, односно $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{E}$, ако је $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$. Претпоставимо да је $A \neq B$.

Нека је p права која садржи тачку B таква да је оријентисани угао од p ка AB једнак $\frac{\beta}{2}$ и нека је q права која садржи тачку A таква да је оријентисани угао од AB ка q једнак $\frac{\alpha}{2}$. Тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. У зависности од углова α, β, праве p, q могу бити паралелне или се сећи у некој тачки.



Углови $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ су оштри или прави и могу бити произвољне оријентације, односно $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Ако су углови α, β исте оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ прави углови, тј. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pm 180^\circ$. Ако су α, β супротне оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ подударни, тј. $\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{2}$. Дакле, $p \parallel q$ ако и само ако $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$ и тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}}$, где је C подножје управне из B на правој q.





Ако $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, онда се p, q секу у некој тачки C. Оријентисани угао $\measuredangle BCA$ представља оријентисани угао од праве p ка правој q. Ако су α, β исте оријентације, они су унутрашњи углови троугла $\triangle ABC$, тј. $\measuredangle BAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle CBA = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle BCA$ је супротне оријентације од углова $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$, па је $-\measuredangle BCA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - 180°$ и $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C, 2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C, \alpha+\beta-360°}$. Нека су α, β супротне оријентације и нека су α', β' неоријентисани углови подударни угловима α, β редом. Како се p и q секу, један од њих је већи од другог, јер би иначе било $p \parallel q$. Без умањења општости, нека је $\beta' > \alpha'$. Тада је угао $\frac{\beta}{2}$ спољашњи угао троугла $\triangle ABC$ и исте оријентације као угао $\measuredangle BCA$, па је $\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \measuredangle BCA$. Према томе, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C, 2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C, \alpha+\beta}$.

Напомена 11. Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi-360°}$. Према томе, у решењу претходног задатка, у случају да $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$ важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$ и ако су α, β исте оријентације и ако су α, β супротне оријентације.

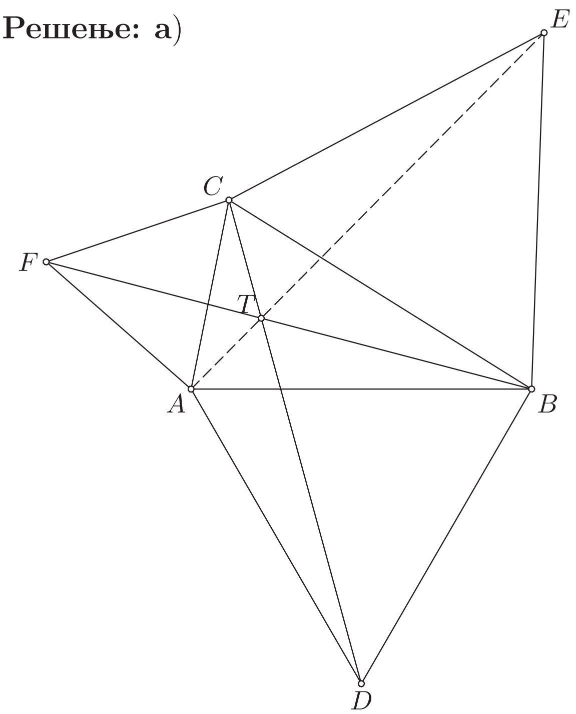
Напомена 12. Дакле, доказали смо да ако важи $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ је ротација за угао $\alpha + \beta$, а ако важи $\alpha + \beta \in \{0°, \pm 360°\}$, онда је композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ транслација ако је $A \neq B$, односно коинциденција ако је $A = B$.

8. Над ивицама оштроуглог троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB, BEC, CFA.

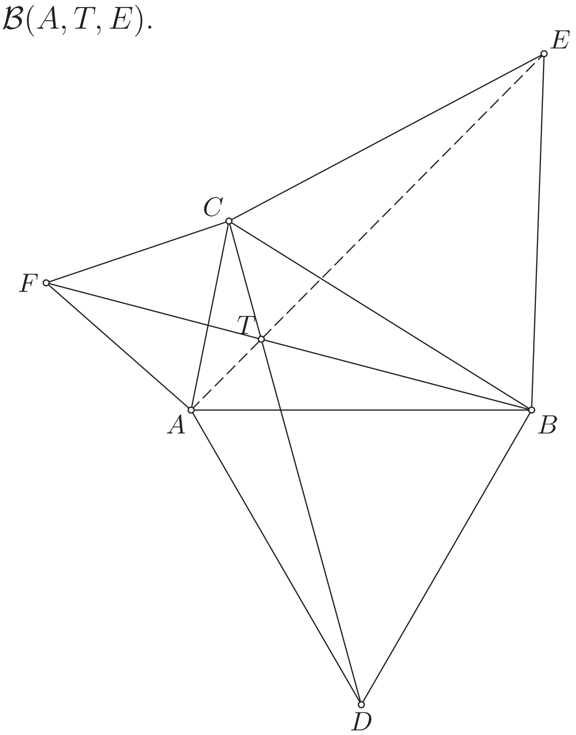
а) (**Торичелијева тачка**) Доказати да су дужи AE, BF, CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.

б) (**Наполеонов троугао**) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.

Решење: а)



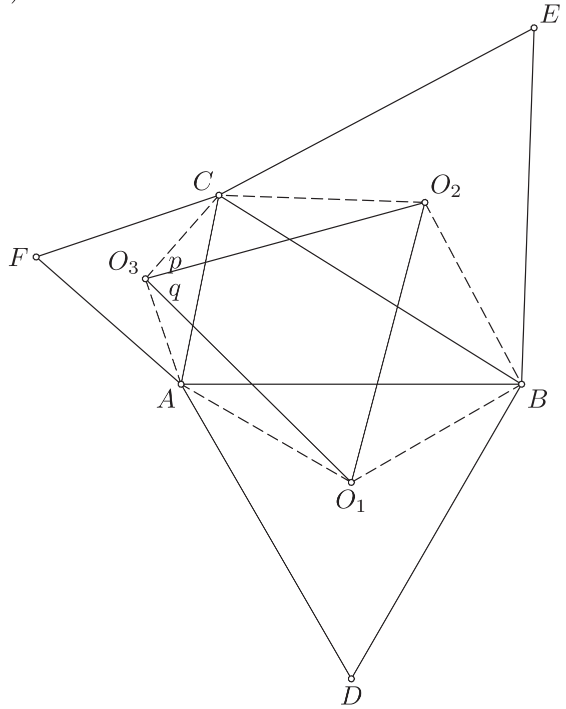
Приметимо да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(D) = B$ и $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(C) = F$. Према томе, следи да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(DC) = BF$, што значи да се дуж DC слика у дуж BF, па су ове дужи подударне. Такође, права DC се слика у праву BF и угао између њих је 60° (сетимо се да је угао између праве и њене слике при ротацији за угао φ једнак управо φ). Нека је њихов пресек тачка T. Треба доказати да тачка T припада дужима DC, BF. Како је $\measuredangle BAC < 90^\circ$, следи да је $\measuredangle DAC = \measuredangle DAB + \measuredangle BAC < 60^\circ + 90^\circ < 180^\circ$, а како је и $\measuredangle DAB = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, B \doteq DA$. Слично, $\measuredangle DBC < 180^\circ$, а како је и $\measuredangle DBA = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, A \doteq DB$. То значи да тачка C припада углу $\measuredangle ADB$, па следи да полуправа DC сече дуж AB. Другим речима, $A, B \div CD$. То значи и да полуправа CD припада углу $\measuredangle ACB$, па је $\measuredangle DCA < \measuredangle BCA < 90^\circ$ и $\measuredangle DCF < 90^\circ + 60^\circ < 180^\circ$. Следи да важи $A, F \doteq CD$, а како важи $A, B \div CD$, онда важи $B, F \div CD$, односно права CD сече дуж BF. Сличним поступком се доказује и да важи $C, D \div BF$, па права BF сече дуж CD. Овим је доказано да је тачка T у пресеку дужи CD, BF. Треба такође доказати да су тачке A, T, E колинеарне и да важи $\mathcal{B}(A, T, E)$. Пошто важи $\mathcal{B}(C, T, D)$, довољно је доказати да је $\measuredangle ATD = \measuredangle ETC$, јер ће тада то бити унакрсни углови, па ће важити $\mathcal{B}(A, T, E)$.



Због ротације важи $\measuredangle DTB = 60°$, па је $\measuredangle BTC = 120°$. Такође, важи $\measuredangle DAB = 60°$, па следи да су $\measuredangle DTB$ и $\measuredangle DAB$ периферијски углови над DB, тј. да је четвороугао $DBTA$ тетиван. Одавде следи да је $\measuredangle ATD = \measuredangle ABD = 60°$. Поред тога, $\measuredangle BEC = 60°$, па је $\measuredangle BTC + \measuredangle BEC = 180°$, па је и четвороугао $BECT$ тетиван. Одавде следи да је $\measuredangle ETC = \measuredangle EBC = 60°$. Дакле, $\measuredangle ATD = \measuredangle ETC$, па следи да су то унакрсни углови, па важи $\mathcal{B}(A, T, E)$, тј. да тачка T припада дужи AE.

Остаје још да се докаже да је $AE = BF = CD$. Већ смо добили $BF = CD$, па остаје да се докаже да је, нпр, $AE = BF$. Међутим, то добијамо на сличан начин као и претходну једнакост. Пошто је $\mathcal{R}_{C,60°}(F) = A$ и $\mathcal{R}_{C,60°}(B) = E$, следи да је $\mathcal{R}_{C,60°}(FB) = AE$, па су и те дужи једнаке, што је и требало доказати.

б)



Означимо центре троуглова $\triangle ADB, \triangle BEC, \triangle CFA$ редом са O_1, O_2, O_3. Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ}$. Она је директна, јер је композиција трију директних изометрија. На основу напомене 12, важи $\mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{R}_{S,120^\circ+120^\circ} = \mathcal{R}_{S,240^\circ}$, за неку тачку S. На основу напомене 11, важи $\mathcal{R}_{S,240^\circ} = \mathcal{R}_{S,240^\circ-360^\circ} = \mathcal{R}_{S,-120^\circ}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,-120^\circ}$. Како је $120^\circ + (-120^\circ) = 0^\circ$, изометрија $\mathfrak{I}$ мора бити коинциденција или транслација. Пошто је

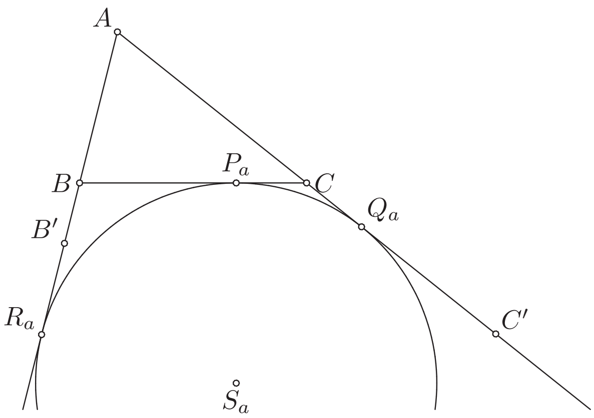
$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(C) &= \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ}(C) = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ}(B) \\ &= \mathcal{R}_{O_3,120^\circ}(A) = C, \end{aligned}$$

следи да изометрија $\mathfrak{I}$ има фиксну тачку, па не може бити транслација. Дакле, $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. То значи да је $\mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{R}^{-1}_{O_3,120^\circ} = \mathcal{R}_{O_3,-120^\circ}$. Нека је p права која садржи тачку O_2 и гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ с правом O_1O_2 и нека је q права која садржи тачку O_1 таква да права O_1O_2 гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ са правом q. Тада је $\mathcal{R}_{O_3,-120^\circ} = \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Следи да тачка O_3 припада правима p, q, па је $\measuredangle O_3O_2O_1 = 60^\circ$ и $\measuredangle O_2O_1O_3 = 60^\circ$. Дакле, троугао $\triangle O_1O_2O_3$ има два угла од 60°, па је он једнакостраничан троугао, што је и требало доказати.

Дефиниција 33. Тачка T из претходног задатка назива се *Торичелијева тачка*. Троугао $\triangle O_1O_2O_3$ назива се *Наполеонов троугао*.

9. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'}$. Видимо да је $\mathfrak{I}$ директна изометрија, јер је композиција трију директних изометрија. Да бисмо доказали да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{P_a}$, докажимо најпре да је P_a фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Нека су Q_a, R_a тачке из Великог задатка. Тангентне дужи BP_a, BR_a су једнаке и важи $\measuredangle P_aBR_a = \measuredangle CBB'$ (оријентисани углови). Слично, важи и $AR_a = AQ_a$ и $\measuredangle R_aAQ_a = \measuredangle BAC$, као и $CQ_a = CP_a$ и $\measuredangle Q_aCP_a = \measuredangle C'CB$. Дакле,

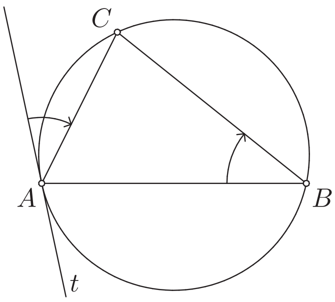
$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(P_a) &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'}(P_a) = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC}(R_a)\\ &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB}(Q_a) = P_a,\end{aligned}$$

па следи да је P_a фиксна тачка. Дакле, $\mathfrak{I}$ није транслација, па је коинциденција или ротација око тачке P_a. Означимо $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA$, $\gamma = \measuredangle ACB$ (мисли се на оријентисане углове). Пошто су (оријентисани) углови $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle CBB'$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\measuredangle CBA + (-\measuredangle CBB') = 180°$, тј. да је $\measuredangle CBB' = \measuredangle CBA - 180° = \beta - 180°$. Слично, пошто су (оријентисани) углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle C'CB$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\measuredangle ACB + (-\measuredangle C'CB) = 180°$, па је $\measuredangle C'CB = \measuredangle ACB - 180° = \gamma - 180°$.

Како је $\measuredangle BAC + \measuredangle CBB' = \alpha + \beta - 180° \notin \{0°, \pm 360°\}$, на основу напомене 12 следи да је $\mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{R}_{M,\alpha+\beta-180°}$, за неку тачку M. Оријентисани углови α, β, γ су исте оријентације, па је $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Како је $\alpha+\beta-180°+\measuredangle C'CB = \alpha+\beta-180°+\gamma-180° = \alpha+\beta+\gamma-360° = 180° - 360° = -180° \notin \{0°, \pm 360°\}$, на основу напомене 12 следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{M,\alpha+\beta-180°} = \mathcal{R}_{P_a,-180°} = \mathcal{S}_{P_a}^{-1} = \mathcal{S}_{P_a}$.

10. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A. Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Како је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_{CA} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}$, следи да је

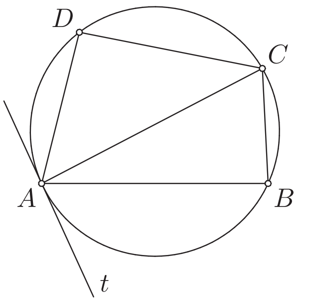
$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{R}_{B,2\measuredangle ABC} \circ \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{BA}}. \end{aligned}$$

Пошто је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$ директна изометрија и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$, на основу теореме 17 (теореме о трансмутацији), следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{R}_{A,2\measuredangle ABC}$. За тангенту t описаног круга троугла $\triangle ABC$ у тачки A важи да је оријентисани угао од праве t ка тетиви AC подударан периферијском углу над том тетивом, што је угао $\measuredangle ABC$, као и да су исте оријентације. Према томе, важи $\mathcal{R}_{A,2\measuredangle ABC} = \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t$, што је и требало доказати.

11. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

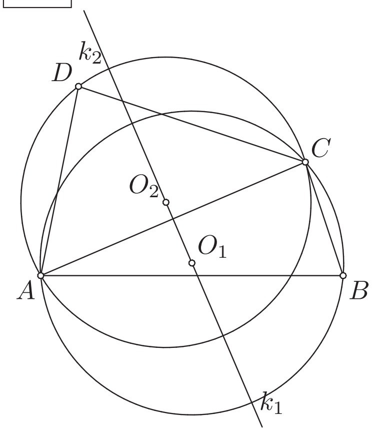
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Додавање коинциденције $\mathcal{E}$ (идентичког пресликавања) у композицију не мења њену вредност, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$:



Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, k његов описани круг и t тангента круга k у тачки A. Круг k је описани круг троугла $\triangle ABC$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$. Такође, круг k је описани круг и троугла $\triangle ACD$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_t$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{E}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$:



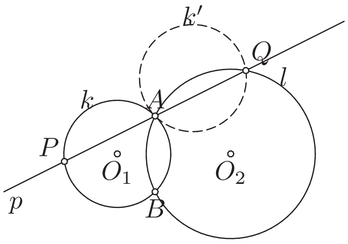
Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Нека су k_1, k_2 редом описани кругови троуглова $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, нека су O_1, O_2 редом њихови центри и нека су t_1, t_2 редом тангенте кругова k_1, k_2 у тачки A. Оба круга садрже тачке A, C, па следи да се O_1, O_2 налазе на медијатриси дужи AC. На основу претходног задатка имамо да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{t_1}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_{t_2}$. Пошто је $\mathcal{E} = \mathfrak{I} = \mathcal{S}_{t_2} \circ \mathcal{S}_{t_1}$, следи да је $\mathcal{S}_{t_2} = \mathcal{S}_{t_1}^{-1} = \mathcal{S}_{t_1}$, па је $t_1 = t_2$, тј. тангенте t_1, t_2 се поклапају. Следи да се центри ових кругова налазе на правој n која је нормална на t_1 у тачки A. Медијатриса дужи AC и права n се разликују, јер A припада правој n, а не припада медијатриси дужи AC.

Дакле, центри O_1, O_2 се налазе на n и на медијатриси дужи AC, па како две разне праве имају највише једну заједничку тачку, следи да се O_1, O_2 поклапају. Према томе, кругови k_1, k_2 имају исти центар и оба садрже тачку A, па се и они поклапају. Следи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

12. Дата су два круга који имају пресечну тачку A. Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.

Решење:

Анализа: Нека је p права која испуњава услове задатка, тј. права која садржи тачку A и на којој дати кругови k, l одсецају подударне дужи.



Нека су P, Q редом пресечне тачке кругова k, l са правом p, различите од тачке A. Тада је $AP = AQ$. Ако се тачке P, Q поклапају, онда оне представљају другу пресечну тачку кругова k, l. Ако се тачке P, Q разликују, онда је A средиште дужи PQ, што значи да је $\mathcal{S}_A(P) = Q$. Посматрајмо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$. Пошто $P \in k$, следи да $Q = \mathcal{S}_A(P) \in k'$, па је Q пресечна тачка кругова k', l, различита од тачке A. Права p је истоветна с правом AQ.

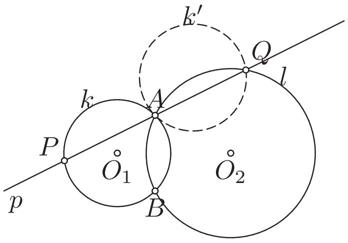
Конструкција: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, конструишимо праву AB.

Конструишимо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$ и означимо са Q пресечну тачку кругова k', l, различиту од тачке A. Конструишимо праву $p = AQ$.

Доказ: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, кругови k, l одсецају дуж AB на правој AB, па одсецају подударне дужи на правој AB.

Нека је $P = \mathcal{S}_A(Q)$. Тада је P пресечна тачка праве p и круга k, различита од тачке A. Заиста, тачка P припада правој AQ (тј. правој p) и припада кругу k (јер је ПК $k' = \mathcal{S}_A(k)$, па је $\mathcal{S}_A(k') = k$). Пошто је Q различита од A, онда је и P различита од A, па следи да је P пресечна тачка праве p и круга k, различита од тачке A. Како је $P = \mathcal{S}_A(Q)$, важи $AP = AQ$, па кругови k, l одсецају подударне дужи на правој p.

Дискусија:



Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, онда је права AB једно од решења.

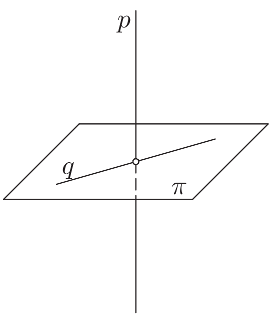
Кругови k', l имају заједничку тачку A. Ако се они поклапају, што се дешава у случају да се k, l додирују споља у тачки A и имају исте полупречнике, постоји бесконачно много решења. Ако се кругови k', l секу у двема тачкама A, Q, постоји јединствена права $p = AQ$. Тада се и кругови k, l секу (у тачкама A, B), па постоје два решења (друго решење је права AB). Ако сем тачке A кругови k', l немају заједничких тачака, задатак нема решења.

Према томе, закључак је следећи. Ако се кругови k, l секу у двема тачкама, постоје два решења. Ако се кругови k, l додирују у тачки A, решење постоји ако и само ако се кругови k, l додирују споља и имају исте полупречнике и онда има бесконачно много решења.

6 Стереометрија

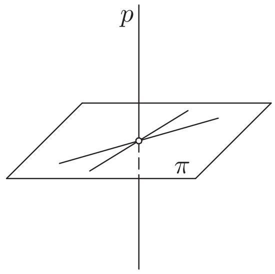
У овој области од интереса нам је еуклидска геометрија у простору. Подсетимо се појмова нормалности правих и равни, диедра, нормалности равни, триедра и мимоилазних правих, као и тврђења везаних за њих.

Дефиниција 34. Нека је π раван и p права која продире ту раван. Кажемо да је права p *уӣравна* (*нормална, орӣоīонална*) на равни π (и обратно), у ознаци $p \perp \pi$ и $\pi \perp p$, ако је управна на свакој правој q равни π која садржи продорну тачку праве p и равни π.



Услов из дефиниције обично није погодан за проверу. Зато користимо следећу теорему.

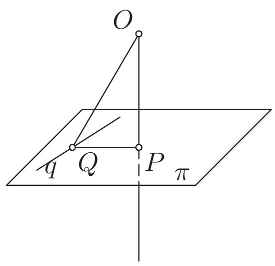
Теорема 22 (Коши)**.** *Нека је π раван и p права која продире ту раван. Ако је права p управна на двема разним правима равни π које садрже продорну тачку праве p и равни π, онда је права p управна на равни π.*



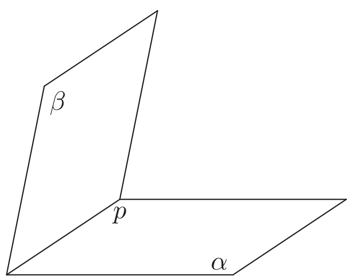
Теорема 23. *Нека је A тачка и π раван. Тада постоји јединствена права n која садржи тачку A и управна је на равни π.*

Теорема 24. *Нека је A тачка и p права. Тада постоји јединствена раван π која садржи тачку A и управна је на правој p.*

Теорема 25 (О трима нормалама)**.** *Ако је права p нормала из тачке O на равни π и продире је у тачки P, а Q подножје нормале из P на правој $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.*

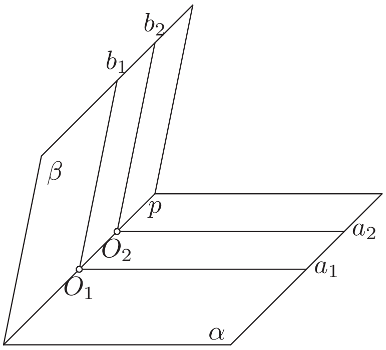


Дефиниција 35. *Диедарска површ* $\angle \alpha p \beta$ јесте унија полуравни $p\alpha$ и $p\beta$ са заједничким рубом p. Ове полуравни називамо *пљоснима* или *странама* те диедарске површи, а праву p њеном *ивицом*.



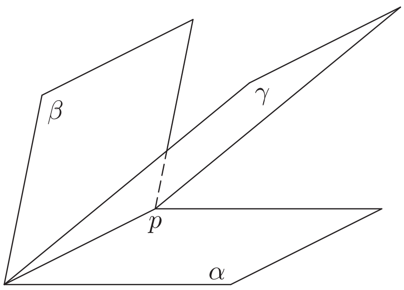
Као што угаона линија разлаже раван којој припада на две области, тако и диедарска површ разлаже простор на две области. Унију диедарске површи и неке од тих области називамо *диедром.* Један од диедара је увек конвексан (представља пресек двају полупростора чији су рубови равни које садрже пљосни диедарске површи) и означавамо га са $\measuredangle \alpha p \beta$.

Теорема 26. *Нека је $\angle \alpha p \beta$ диедарска површ и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на ивици p те диедарске површи. Тада те равни секу диедарску површ по угаоним линијама $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$ таквим да су углови $\measuredangle a_1 O_1 b_1, \measuredangle a_2 O_2 b_2$ међусобно подударни.*



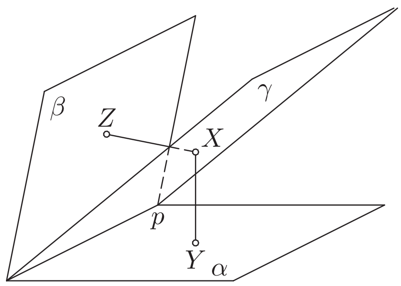
Дефиниција 36. Сваки од углова из претходне теореме назива се *нагибним углом* диедра.

Није тешко приметити да су два диедра међусобно подударна ако и само ако су такви и њихови нагибни углови.



Дефиниција 37. Нека је $\measuredangle \alpha p \beta$ диедар. Полураван $p\gamma$ с рубом p, која припада диедру $\measuredangle \alpha p \beta$ и дели га на два међусобно подударна диедра $\measuredangle \alpha p \gamma, \measuredangle \gamma p \beta$, назива се *симетралном полуравни* диедра $\measuredangle \alpha p \beta$.

Теорема 27. *Нека је* $\measuredangle \alpha p \beta$ *диедар. Тада је симетрална полураван диедра* $\measuredangle \alpha p \beta$ *скуп свих тачака* X *простора које припадају диедру* $\measuredangle \alpha p \beta$ *такве да је* $XY = XZ$*, где је* Y *подножје управне из* X *на полуравни* $p\alpha$*, а* Z *подножје управне из* X *на полуравни* $p\beta$*.*

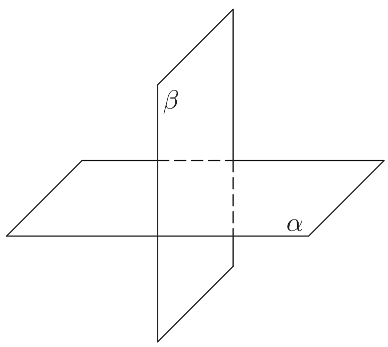


Дакле, симетрална полураван диедра је уопштење бисектрисе угла.

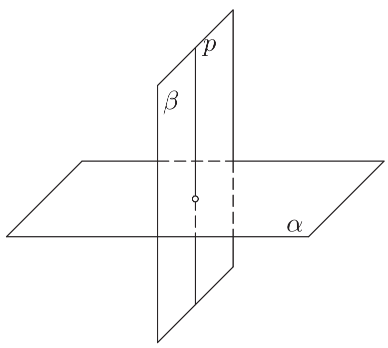
Дефиниција 38. Диедар је *прав* ако је његов нагибни угао прав.

Сличне дефиниције имамо за оштар и туп диедар.

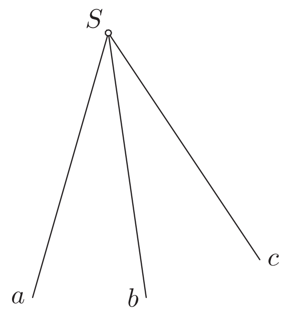
Дефиниција 39. Равни α, β су међусобно *управне* (*нормалне, ортогоналне*), у ознаци $\alpha \perp \beta$, ако садрже пљосни правог диедра.



Теорема 28. *Нека је* α *раван и* p *права управна на равни* α*. Тада је свака раван* β*, која садржи праву* p*, управна на равни* α*.*

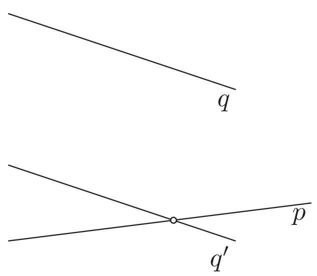


Дефиниција 40. Нека су Sa, Sb, Sc три полуправе у простору са заједничким теменом S, које не припадају истој равни. Тада скуп тачака $\measuredangle aSb \cup \measuredangle bSc \cup \measuredangle cSa$ називамо *триедарском површи.* Тачку S називамо *теменом* тог триедра, полуправе Sa, Sb, Sc његовим *ивицама*, а углове $\measuredangle aSb, \measuredangle bSc, \measuredangle cSa$ његовим *пљоснима* или *странама.*



Може се доказати да триедарска површ разлаже простор на две области, једна од којих је *унутрашњост*, а друга *спољашњост* триедарске површи. Унија триедарске површи и њене унутрашњости назива се *триедром.*

Дефиниција 41. Праве p, q називамо *мимоилазним* правима ако не постоји раван која их садржи.



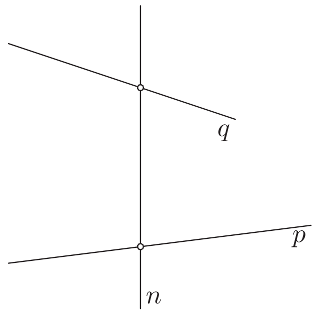
Мимоилазне праве немају заједничких тачака, јер би у супротном постојала раван која их садржи. Мимоилазне праве нису ни паралелне, јер паралелне праве припадају једној равни. *Углом* између мимоилазних правих p, q сматрамо угао између било којих двеју правих p', q' које се секу, таквих да је $p' \parallel p$ и $q' \parallel q$. Према томе, можемо извести следећи закључак.

Теорема 29. *Ако је права n управна на равни π, онда је она управна на свакој правој те равни.*

Теорема 30. *Ако је права n управна на двема непаралелним правима равни π, онда је права n управна на равни π.*

Заиста, ако је права n управна на двема непаралелним правима p, q равни π, тада је она управна на правима p', q' равни π, које садрже продорну тачку праве n и равни π и паралелне су правима p, q, а пошто праве p, q нису паралелне, онда су праве p', q' различите, па тврђење следи на основу Кошијеве теореме.

Теорема 31. *Нека су p, q мимоилазне праве. Тада постоји јединствена права n која сече праве p, q и управна је на њима.*



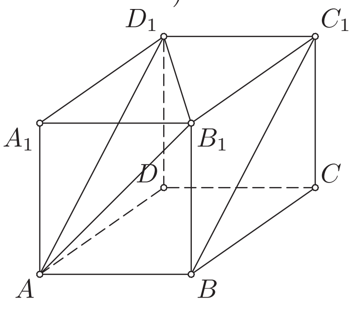
1. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Одредити угао између правих AB_1 и BC_1.

б) Одредити угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D.

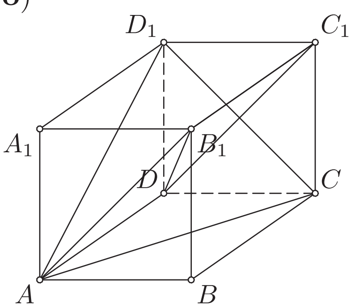
в) Доказати да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2:1$.

Решење: а)



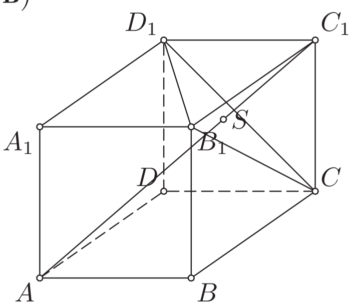
Праве AB_1 и BC_1 су мимоилазне. Како је $AD_1 \parallel BC_1$, следи да је угао између мимоилазних правих AB_1, BC_1 једнак углу између правих AB_1, AD_1. Троугао $\triangle AB_1D_1$ је једнакостраничан, јер су његове ивице међусобно подударне (све три су подударне дијагонали квадрата, који представља страну коцке), па је $\measuredangle B_1AD_1 = 60^\circ$.

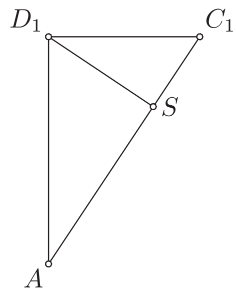
б)



Желимо да одредимо угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D. Делује да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D. Заиста, права CD_1 је управна на правој C_1D (дијагонале квадрата CC_1D_1D), а права B_1C_1 је управна на равни CC_1D_1D, па је управна на правој CD_1. Дакле, $CD_1 \perp C_1D$ и $CD_1 \perp B_1C_1$, па је $CD_1 \perp AB_1C_1D$. Одавде следи да је $ACD_1 \perp AB_1C_1D$, јер раван ACD_1 садржи праву CD_1 која је управна на равни AB_1C_1D.

в)



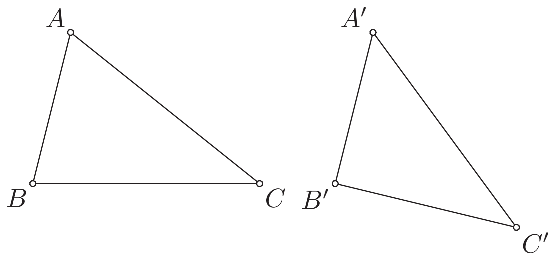


Докажимо прво да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1. Из доказа претходног дела овог задатка следи да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D, па је управна на правој AC_1. Дакле, $AC_1 \perp CD_1$. Такође, права B_1D_1 је управна на равни ACC_1A_1. Заиста, $B_1D_1 \perp A_1C_1$ (дијагонале квадрата $A_1B_1C_1D_1$), а пошто је $CC_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следи да је $CC_1 \perp B_1D_1$. Дакле, $B_1D_1 \perp ACC_1A_1$, па следи да је $AC_1 \perp B_1D_1$. Према томе, из $AC_1 \perp CD_1$ и $AC_1 \perp B_1D_1$ следи да је $AC_1 \perp B_1CD_1$.

Означимо продорну тачку праве AC_1 и равни B_1CD_1 са S. Троугао $\triangle AC_1D_1$ је правоугли с правим углом код темена D_1, јер је права C_1D_1 управна на равни AA_1D_1D, па је управна и на правој AD_1. Права D_1S припада равни B_1CD_1, па следи да је $AC_1 \perp D_1S$, тј. да је D_1S висина правоуглог троугла $\triangle AC_1D_1$. Како је $\measuredangle ASD_1 = 90^\circ = \measuredangle D_1SC_1$ и $\measuredangle SAD_1$ и $\measuredangle SD_1C_1$ имају нормалне краке, па су подударни, следи да су троуглови $\triangle ASD_1$ и $\triangle D_1SC_1$ слични. Дакле, $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{AD_1}{D_1C_1}$. Ако је a ивица коцке, онда је $AD_1 = a\sqrt{2}$ и $D_1C_1 = a$, па је $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$. Следи да је $\frac{AS}{SC_1} = \frac{AS}{D_1S} \cdot \frac{SD_1}{SC_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, тј. $AS : SC_1 = 2 : 1$, што је и требало доказати.

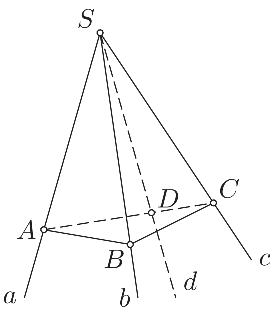
За решавање наредног задатка, потребан је следећи став.

Став 5. *Нека су $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ троуглови такви да је $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$. Тада је $BC > B'C'$ ако и само ако је $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.*



2. Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.

Решење:

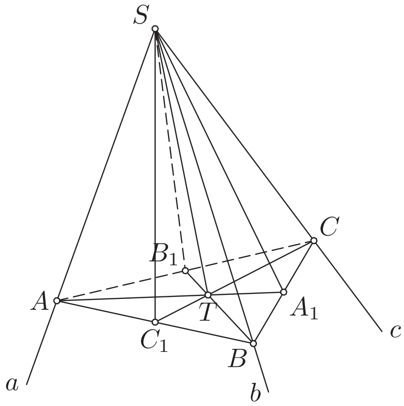


Нека је $Sabc$ триедар. Треба доказати да је $\measuredangle aSb + \measuredangle bSc > \measuredangle aSc$. Ако је $\measuredangle bSc \geq \measuredangle aSc$ неједнакост је тривијално испуњена. Претпоставимо зато да је $\measuredangle bSc < \measuredangle aSc$ и нека је Sd полуправа која припада углу $\measuredangle aSc$ таква да је $\measuredangle dSc = \measuredangle bSc$. Нека су B, C произвољне тачке полуправих Sb, Sc редом, различите од тачке S. Нека је D тачка полуправе Sd таква да је $SD = SB$ и нека је A пресечна тачка полуправе Sa и праве CD. Троуглови $\triangle SCB$ и $\triangle SCD$ су подударни, јер је $SC = SC$, $\measuredangle CSD = \measuredangle CSB$ и $SD = SB$. Следи да је $CD = CB$. Из једнакости $AC = AD + DC$, неједнакости троугла $AC < AB + BC$ и претходно добијене једнакости $DC = BC$ следи да је $AD < AB$. Троуглови $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ имају подударне ивице са заједничким теменом S ($SA = SA$ и $SB = SD$), па пошто је $AB > AD$, на основу става 5 следи да је $\measuredangle ASB > \measuredangle ASD$. Према томе, добијамо да важи

$$\measuredangle aSb + \measuredangle bSc = \measuredangle ASB + \measuredangle BSC > \measuredangle ASD + \measuredangle DSC = \measuredangle ASC = \measuredangle aSc.$$

3. Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.

Решење:



Нека је $Sabc$ триедар. Нека A произвољна тачка полуправе Sa, која је различита од тачке S и нека су B, C редом тачке полуправих Sb, Sc такве да је $SB = SC = SA$. Тада су троуглови $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SAC$ једнакокраки. Ако су C_1, A_1, B_1 редом средишта дужи AB, BC, AC, онда су полуправе SC_1, SA_1, SB_1 бисектрисе углова $\measuredangle ASB, \measuredangle BSC, \measuredangle ASC$, односно страна триедра $Sabc$. Према томе, равни које садрже ивицу триедра и симетралу наспрамне стране јесу равни SAA_1, SBB_1, SCC_1. С обзиром на то да су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне дужи троугла $\triangle ABC$, следи да се секу у једној тачки и означимо ту тачку са T. Према томе, равни SAA_1, SBB_1, SCC_1 садрже тачке S, T, па стога садрже и праву ST. Дакле, права ST је заједничка за све три равни, што је и требало доказати.